

## 1.- INTRODUCCION

El contenido de esta conferencia es suficientemente extenso, para ser tratado dentro de unos límites razonables de tiempo y espacio. Aquí se comentaran algunos criterios que se deben tener en cuenta en el diseño de obras singulares. En particular se pondrá un especial énfasis en la elaboración de los datos precisos para un análisis sísmico, aspecto de excepional importancia y que contiene numerosas cuestiones abiertas, en espera de acuerdo entre los expertos. Se finalizara esta exposición con un breve resumen de los métodos y modelos de cálculo mas utilizados en el análisis, y su rango de aplicación.

Como es bien sabido se pueden considerar dos casos extremos en la actuación de los efectos sísmicos sobre las construcciones. Uno, sobre estructuras de dimensiones normales y de frecuente aparición, como corresponden a la mayoría de las edificaciones de viviendas. El otro caso, esta representado por las obras públicas y en general construcciones importantes, como son las centrales nucleares, presas, canales, oleoductos, etc. La filosofía y metodología del diseño difiere de un modo considerable entre ambas situaciones. La importancia económica global de la primera es extraordinaria, sin embargo cada edificación individualizada debe de llevarse a cabo con la utilización de recursos escasos. Se comprende en este caso que la información sísmica, corresponda a niveles gene

(\*) Catedrático de Cálculo de Estructuras. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Santander.

rales a partir de mapas sismotectónicos recomendaciones y normas, y en general sin recurrir al análisis específico de la ubicación de la estructura. Por otra parte los criterios de seguridad al colapso ante la actuación sísmica no son innecesariamente estrictos. Así, es admisible la consideración de daños irreparables en un edificio de vivienda bajo un terremoto intenso, salvando el hecho de que la seguridad de sus habitantes se mantiene. Posición opuesta esta representada por las obras públicas de importancia excepcional. En estas obras singulares, un estudio pormenorizado y específico de las posibles acciones sísmicas se hace preciso, así como una evaluación refinada de las consecuencias en términos económicos y de vidas humanas, ante la actuación de un seísmo, lo que implica muchas veces la necesidad de mantener en condiciones aceptables de servicio estas construcciones públicas.

En los apartados siguientes se describen, de un modo somero, algunos aspectos sobresalientes a tener en cuenta en el proceso de diseño de una obra pública excepcional. Dado el carácter de revisión de este artículo los detalles específicos se transfieren a las distintas publicaciones técnicas y en algunos casos de interés, se resumen las etapas características de un análisis en los apéndices.

## 2.- DATOS DE UN CALCULO SISMICO

En primer lugar conviene poner de relieve que la especificación del terremoto a considerar en un proyecto no puede basarse únicamente en un cuerpo de teoría científica y ello

por varios motivos entre los que cabe destacar: (a) el escaso conocimiento actual sobre las causas del terremoto y la falta de acuerdo entre los expertos en como utilizar dicho conocimiento; (b) las simplificaciones importantes que se hace preciso utilizar en el tratamiento de los fenómenos relacionados con la aparición de terremotos y la definición de los movimientos que se producen en la cimentación; (c) la adopción del riesgo inherente a la especificación de un sismo de proyecto, es decir, del riesgo de la aparición de un terremoto de un nivel determinado frente a los costos que la sociedad debe sufragar para construir estructuras resistentes al mismo, representa una decisión en la que el criterio y experiencia del ingeniero, así como la sabiduría política son tan necesarios como los conocimientos científicos.

La norma sismorresistente española establece que para estructuras singulares, es decir, para las que su destrucción implica un daño substancial, es preciso llevar a cabo estudios monográficos de detalle con objeto de cuantificar la máxima actividad sísmica previsible que sea susceptible de afectar a estas estructuras. Un procedimiento aplicado en diferentes obras públicas y descrito sumariamente en el apéndice A, permite definir un terremoto de cálculo capaz de causar el máximo daño en un emplazamiento, dentro de la vida útil de la obra que se estudia. El problema es estocástico y depende de las condiciones físicas del entorno, por lo que criterios estadísticos semejantes a los utilizados en los estudios de riadas y vientos máximos son numerosas veces utilizados. La dificultad mayor de un análisis de este tipo reside en los escasos datos,

particularmente cuantitativos, sobre las características de movimientos sísmicos intensos que han afectado el emplazamiento en un lapso de tiempo razonablemente largo . La definición idealmente más adecuada de una acción sísmica sobre una estructura singular corresponde al conocimiento del acelerograma del terremoto de diseño susceptible de producir el máximo daño. Sin embargo, esta situación es estadísticamente inalcanzable por la carencia absoluta de medidas de este tipo en un emplazamiento. Incluso el conocimiento de un acelerograma de un seismo sentido en el emplazamiento no supone indudablemente su repetición en el evento de una nueva actuación de un terremoto en el lugar. No obstante a estas dificultades, han surgido numerosas técnicas de análisis con objeto de simular estas acciones sísmicas, algunas de las cuales se han descrito o se comentan en otras conferencias de este curso. Así, el análisis quasi-estático con fuerzas equivalentes, la introducción de espectros de respuesta, la generación matemática de terremotos sintéticos o artificiales bien mediante procedimientos estadísticos, de la teoría del control o de los métodos de los procesos aleatorios, constituyen algunos ejemplos de estas técnicas. Se observa que todas ellas precisan, en alguna forma, de la medida de algún movimiento sísmico intenso (en particular, del acelerograma). Es decir, se precisa de una muestra, normalmente escasa, pero representativa del tipo de fenómeno que se intenta simular. En la actualidad, la mayoría de las muestras existentes se han obtenido de la costa Oeste de los Estados Unidos y en el Japón, por lo que los resultados deducidos del análisis -espectros de res-puesta, etc.- son estrictamente aplicables a estas zonas. La

extrapolación a otras áreas del planeta es evidentemente arriesgada y a veces, se ha comprobado es totalmente errónea (terremotos de Friuli y Agadir), al observar un contenido frecuencial limitado en contraste con los movimientos usuales en California que pueden ser simulados mediante procesos de banda ancha (ruidos blancos, ruidos de disparo, etc.).

Una técnica que parece prometedora corresponde a intentar la simulación matemática del proceso de generación física del terremoto, recurriendo, por ejemplo, a la teoría de la fractura dinámica en grandes macizos compuestos de materiales con características elastodinámicas complejas. De este modo se podría modelar el mecanismo de transmisión de las ondas sísmicas desde el foco hasta la superficie donde se encuentra situado el emplazamiento.

Sin embargo en la practica se suele definir el terremoto máximo mediante un parámetro único: la aceleración máxima del terreno. Incluso este conocimiento implica la adquisición de información referente a las tres áreas:

- (a) Evolución geotectónica durante un periodo de tiempo dilatado (por ejemplo, el último millón de años).
- (b) Sismicidad histórica en la región de interés.
- (c) Caracterización de los mecanismos de terremotos, propagación de ondas sísmicas y las peculiaridades geológicas.

Se hace normalmente necesario una depuración estadística de los datos históricos, que se tratan dentro del área (b).

Un procedimiento utilizado en algunos casos se describe en el apéndice A.

Por otra parte el conocimiento todavía es difuso sobre los mecanismos físicos de generación de los terremotos. Las fórmulas de atenuación que se exponen a continuación son por lo tanto, aplicables dentro de una gran dispersión, a emplazamientos situados a distancias moderadas al epicentro.

En general las ondas sísmicas generadas en el origen del terremoto se propagan atenuándose en todas las direcciones de acuerdo con los siguientes principios, en donde se denomina  $R$  la distancia focal:

(a) Atenuación geométrica.

En zonas cercanas, la atenuación depende de los parámetros y mecanismos de generación y las amplitudes decrecen en proporción a  $R^{-2}$ .

En zonas lejanas, las ondas  $P$  y  $S$  se atenúan según  $R^{-1}$  y las superficiales de acuerdo con  $R^{-1/2}$ .

(b) Atenuación material.

La disipación de la energía interna se disipa según el modelo aproximado siguiente:

$$A(w,R) = A(w,0) \cdot \exp\{-a(w) \cdot R\}$$

$$\text{siendo } a(w) = w/Q_c$$



$c$  la velocidad de fase.

$1/Q$  la atenuación específica.

$A(w,R)$  la amplitud de Fourier a la distancia  $R$ .

$A(w,0)$  corresponde a  $A(w,R)$  con  $R=0$ .

Para California el valor de  $Q$  es aproximadamente 400.

Teóricamente es posible deducir con un modelo probabilístico adecuado, el valor de la amplitud de Fourier en el origen,  $A(w,0)$ , si bien con un elevado grado de incertidumbre. Sin embargo, en el estado actual del conocimiento de las cargas sísmicas y sus efectos sobre las estructuras es suficiente calcular estimaciones de los valores picos esperados del movimiento, y que permiten su caracterización:

$a_{\max}$ : aceleración máxima

$v_{\max}$ : velocidad máxima

$d_{\max}$ : desplazamiento máximo

$s_{\max}$ : duración del terremoto

A veces se utiliza asimismo en la literatura el período predominante ( $T_p$ ) que está relacionado con el contenido en frecuencias de las ondas.

Los valores  $a_{\max}$  y  $d_{\max}$  se corresponden de un modo adecuado con la respuesta de estructuras muy rígidas (frecuencias altas  $> 2$  Hz) y muy flexibles (frecuencias bajas  $< 0,5$  Hz) respectivamente. En los rangos de frecuencias naturales interme-

medias de las estructuras, existe una correlación con  $v_{\max}$  pero con una mayor dispersión que en los casos anteriores. Los parámetros anteriores no son independientes y se han propuesto los parámetros de control:

$$a \cdot d/v^2 \quad \text{y} \quad v/a$$

El primero decrece con la magnitud y según la distancia se incrementa de acuerdo con la fórmula aproximada:

$$a \cdot d/v^2 = 1 + 400/R^{0,6} \quad \text{con R en Kms.}$$

El segundo parámetro también se incrementa con la distancia pero disminuye con la magnitud.

En general, la atenuación de la aceleración con la distancia es mayor para el parámetro  $a_{\max}$ , decrece para  $v_{\max}$  y es más lenta para el movimiento  $d_{\max}$ .

Tras las consideraciones anteriores se pueden utilizar las siguientes fórmulas empíricas de atenuación:

$$y = b_1 \cdot e^{b_2 m} [f(R)]^{-b_3} \epsilon \Delta \sigma$$

con "y" representando  $a_{\max}$ ,  $v_{\max}$ ,  $d_{\max}$

$b_1$ ,  $b_2$  y  $b_3$  constantes que se determinan de acuerdo con los datos experimentales.

$f(R)$  función de la distancia focal.



$\epsilon$  una variable aleatoria que tiene en cuenta la dispersión entre los datos experimentales y los valores calculados según la expresión anterior.

$\Delta\sigma$  es una variable que refleja la disminución tensional en el caso de zonas cercanas.

La tabla 1 presenta los valores propuestos por diferentes autores para las fórmulas de atenuación en California. Se muestran asimismo los coeficientes de dispersión y se observa que son muy elevados. Normalmente la deducción de las constantes para una región determinada exige un número suficiente de datos experimentales, lo que es infrecuente. En algunos casos se suele conocer únicamente la aceleración máxima. A partir de ella a veces mediante relaciones apriorísticas, se deducen valores de los restantes parámetros  $d_{\max}$  y  $v_{\max}$ , precisos para definir el espectro de respuesta. Así, en el caso de las centrales nucleares sólo se necesita el conocimiento de  $a_{\max}$ , y  $d_{\max}$  para la construcción del espectro de diseño. A veces este último parámetro se estima mediante la relación:

$$d_{\max}(m) = 0,91 a_{\max} \quad (\text{en fracción de } g)$$

La figura 1 representa las distintas fórmulas de atenuación de la tabla 1.

La duración del terremoto constituye un parámetro para el que no existe todavía una definición ampliamente aceptada, pero se suele corresponder con el intervalo del terremoto con

TABLA 1.- Fórmulas de atenuación con la distancia.

parámetros del movimiento del $y = b_1 \exp(b_2 m) [\bar{f}(R)]^{-b_3}$ terreno							
AUTHOR	y	$b_1$	$b_2$	$b_3$	f(R)	$\sigma$	'IDENTIF
McGuire	a, cm s <sup>-2</sup>	472	0.640	1.301	R+25	0.51	a <sub>1</sub>
Donovan	"	1080	0.50	1.32	"	0.707	a <sub>2</sub>
Esteva	"	5000	0.8	2.0	R+40	--	a <sub>3</sub>
McGuire	v, cm s <sup>-1</sup>	5.64	0.923	1.202	R+25	0.63	v <sub>1</sub>
Correction $I = \frac{\log 14v}{\log 2}$	"	52.6	0.579	1.32	"	--	v <sub>2</sub>
McGuire	d, cm	0.393	0.999	0.885	"	0.76	d <sub>1</sub>
Espectro de pseudo velocidades con 5% de amortiguamiento.							
	Period(sec)	a'	b	c	f(R)	$\sigma$	$\bar{S}$
McGuire	0.1	10.09	0.233	1.341	R+25	0.59	
	0.2	31.45	0.226	1.323	"	0.54	
	0.5	5.74	0.356	1.197	"	0.55	
	0.8	1.245	0.415	1.020	"	0.58	
	1.0	0.432	0.399	0.704	"	0.63	
	2.0	0.122	0.466	0.675	"	0.80	
	5.0	0.0706	0.557	0.938	"	0.94	
	8.0	0.1475	0.435	0.767	"	0.82	
Johnson	0.055	2.691	0.303	1.395	$\sigma \equiv$ desviación típica de $\ln y$ duración en seg. $s_1 = 10^{(0.435m-1.85)+0.3R}$ $s_2 = 0.02 \exp(0.74m) + 0.3R$		
	0.101	7.497	0.327	1.558			
	0.248	20.01	0.305	1.396			
	0.609	2.067	0.429	1.135			
	1.004	0.831	0.501	1.134			
	2.469	0.405	0.532	1.137			

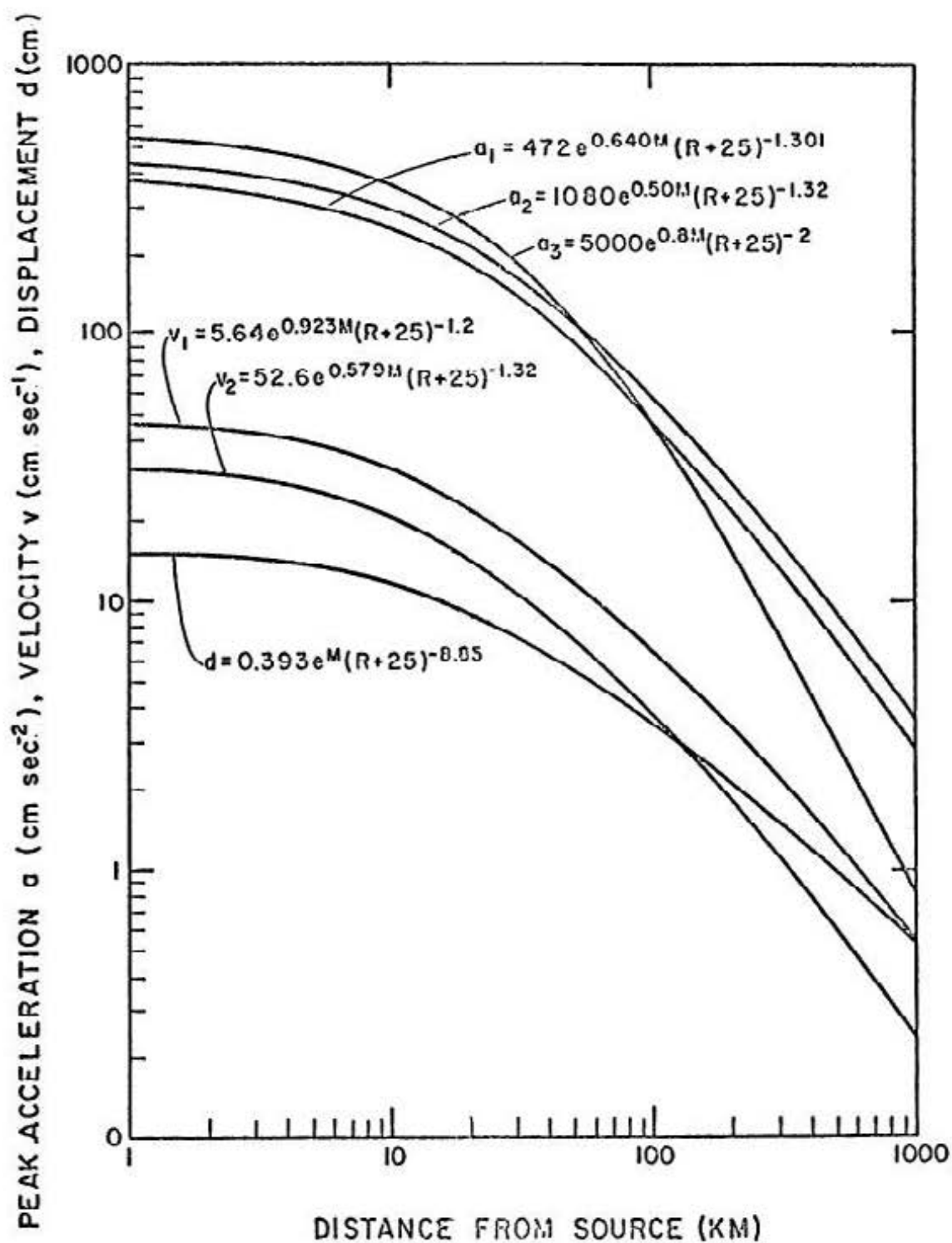


FIGURA 1.- Comparación entre diferentes fórmulas de atenuación.  
(Según Oliveira C.S. EERC 78/16 Universidad de California)

una aceleración superior a un mínimo umbral y representa la fase más intensa del temblor. Este parámetro es importante en el estudio del daño acumulado en las estructuras, particularmente en los suelos. La licuefacción constituye un ejemplo típico, en donde la duración juega un papel importante. Este parámetro depende principalmente de los valores pico del movimiento y de la distancia focal. El tipo de rotura y la geología influyen también de un modo importante. En general, las fórmulas de atenuación son:

$$s = d_1 \cdot e^{d_2 \cdot m} + d_3 \cdot R$$

en donde las constantes  $d_1$ ,  $d_2$  y  $d_3$  deben de ser determinadas de los datos experimentales. Oliveira utilizó en el análisis de la región de San Francisco los datos de la tabla 1, que se representan en la figura 2.

Por último, el período predominante, se ha deducido para California según la fórmula empírica que presenta una gran dispersión:

$$T_p = \begin{cases} \frac{m}{27} + m^{2,5} \cdot \frac{R}{67000} & R > 40 \text{ Kms.} \\ \frac{m}{27} & R < 40 \text{ Kms.} \end{cases}$$

Es interesante notar que se han propuesto fórmulas de atenuación en función del período predominante. Se observa que los períodos más bajos se atenúan más rápidamente que los al-

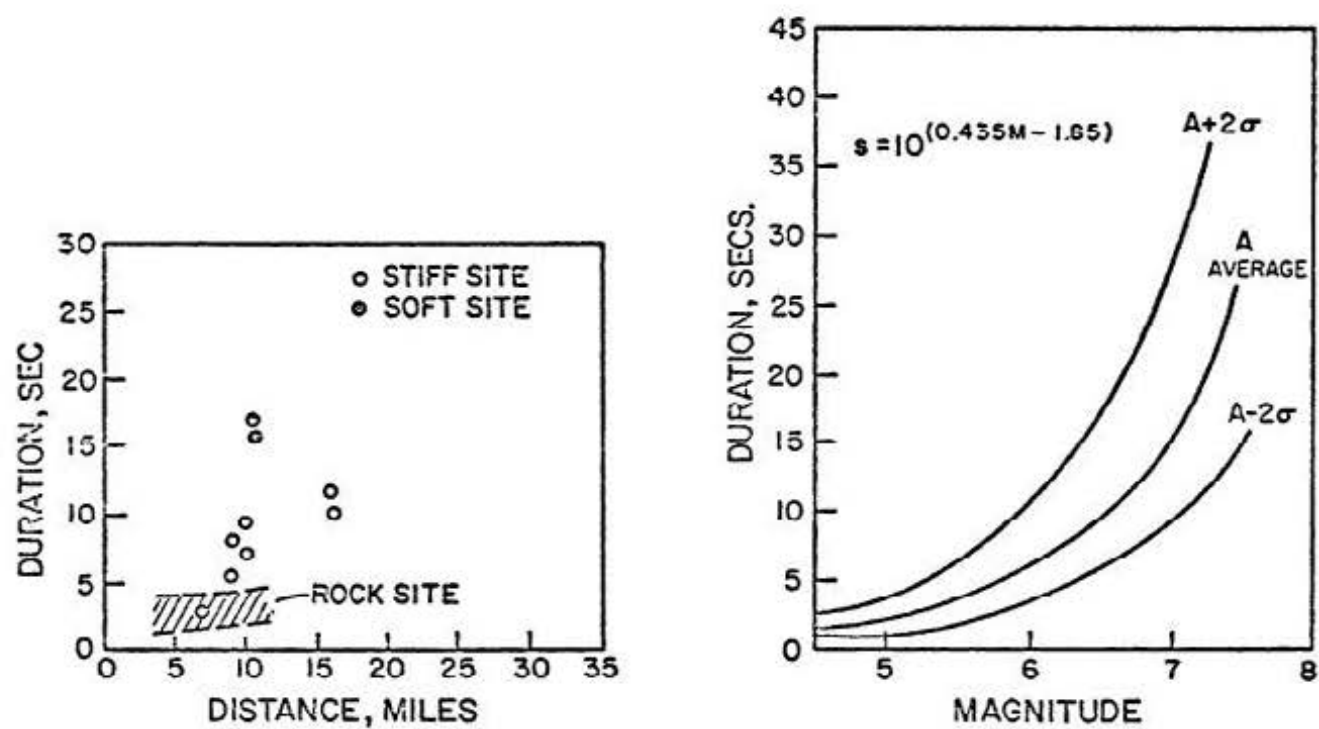


FIGURA 2.- Duración significativa del movimiento del suelo como función de la distancia al origen, condiciones locales y magnitud del área de San Francisco.  
(Según Oliveira C.S. EERC 78/16 Universidad de California)

tos según la fórmula de Benioff:

$$\text{Factor de atenuación } F = \left( \frac{1,25}{1 + D/Y_0} \right)^n$$

$$\text{con } n = 1 + 1/2,5 T_p$$

D = distancia a la falla  $D > 40$  Kms.

$Y_0 = 80$  Kms.

En el apéndice A donde se describe suscintamente un modelo matemático de obtención de la intensidad máxima esperada en una obra pública singular, se hace uso de las fórmulas de atenuación anteriores.

El terremoto así definido corresponde a la superficie libre del terreno sin ninguna estructura (free-field). La Agencia americana de Energía Atómica acepta para terremotos de tipo promedio los espectros de respuesta de Newmark-Blume-Kapur que se han obtenido principalmente a partir de seismos registrados en este tipo de suelos. La definición de espectro de respuesta puede verse en el apéndice B, donde se indica su determinación a partir de un registro de un acelerograma. Aquí se describe los espectros de respuesta de diseño de centrales nucleares, propuestos por Newmark-Blume-Kapur en 1973. El estudio se llevó a cabo aprovechando espectros de diferentes terremotos en diferentes terrenos con aceleraciones pico comprendidas entre  $0,031g$  y  $1.25g$ . Las ordenadas medias mas una desviación típica de esta muestra de espectros definen las diferentes ordenadas del espectro de diseño. Una envolvente del mismo

se especifica en un diagrama trilogarítmico, a partir de la aceleración máxima esperada, uniendo mediante segmentos de recta una serie de ordenadas correspondientes a unas frecuencias características, puntos: **A**(0,25hz), **B**(2,5hz), **C**(9hz) y **D**(33hz). Las ordenadas de estas frecuencias se obtienen para un amortiguamiento dado, multiplicando la aceleración máxima del terreno (en el caso del punto D de desplazamiento máximo) por los factores de la tabla 2. Si el valor esperado del desplazamiento máximo del terreno no es conocido puede estimarse a partir de la aceleración máxima esperada mediante la relación:

$$d_{\max} = 0,91 a_{\max}$$

en el desplazamiento ( $d_{\max}$ ) medido en metros y la aceleración ( $a_{\max}$ ) en fracción de la gravedad.

TABLA 2

ACELERACION				DESPLAZAMIENTO
Amortiguamiento( $\eta$ )	A	B	C	D
0.5	1	4.96	5.95	3.20
2.0	1	3.54	4.25	2.50
5.0	1	2.61	3.13	2.05
7.0	1	2.27	2.72	1.88
10.0	1	1.90	2.28	1.70

Con relación a obras situadas en terrenos muy blandos o roca firme, el espectro anterior debería ser modificado convenientemente (amplificación del suelo). Numerosos procedi-



mientos existen y en nuestro país algunos han sido utilizados en varios casos. De ellos se hablarán en conferencias posteriores.

Por otra parte, la especificación del espectro correspondiente a terremotos en la superficie libre y se hace preciso, entonces, determinar un seísmo compatible bien al nivel de contacto de la estructura con el terreno en el caso de estructuras parcialmente enterradas o bien en la base del suelo representado en el modelo matemático. Ello implica introducir hipótesis sobre el tipo de ondas sísmicas que llegan a la superficie. Lo usual es considerar ondas transversales (de corte) con propagación vertical en el estudio de movimientos horizontales y ondas longitudinales de compresión con propagación vertical en el caso de movimientos verticales. Otros tipos de ondas sin embargo pueden conducir a sollicitaciones distintas y a veces más severas, que las inducidas por los anteriores (tensiones y rotaciones de la base). Detalles de este tipo de análisis de interacción dinámica suelo-estructura se exponen en una lección posterior.

A veces, si bien por los diferentes niveles de incertidumbre que existen en los datos sísmicos básicos, no es usual en la práctica, se hace preciso la definición del terremoto de diseño en términos más completos: un acelerograma. Corresponde a situaciones para las que se prevea una respuesta no elástica de la estructura, es decir, no se intenta que ante el terremoto fuerte permanezca en servicio sino solamente que su seguridad no sea amenazada seriamente. En estos casos de análisis no

lineal, los acelerogramas de terremotos reales (producidos generalmente en otros lugares) convenientemente escaladas sus ordenadas, (duplicadas o recortadas sus abscisas temporales), etc. pueden ser utilizadas. Mas adecuados son sin embargo, los terremotos sintéticos, es decir, los generados mediante técnicas estocásticas, que satisfacen en la media condiciones especificadas (su espectro coincide con uno dado o sus ordenadas espectrales no son inferiores a las de uno de diseño, etc.), Técnicas de obtención de estos espectros sintéticos o artificiales se dan mas adelante en este curso. Aquí solo se comenta el hecho, que un acelerograma de diseño deducido de modo que sus ordenadas espectrales sean superiores a un espectro especificado, no corresponde a una situación realista. Mas costoso, si bien mas adecuado en este contexto, sería la obtención de una serie de acelerogramas con espectro coincidente en la media al de diseño y analizar de forma estadística la respuesta (mediante técnicas numéricas de Montecarlo en el caso de problemas no lineales).

### 3.- MODELO DINAMICO

Conocido el input dinámico, según el caso, en alguno de las siguientes formas: aceleración máxima, espectro de respuesta o acelerograma se hace preciso modelar la estructura de acuerdo con su importancia. Existen técnicas adecuadas como funciones de forma, concentración de masas, estructuras de barras, etc, pero todas ellas pueden ser, desde un cierto punto de vista incluidas, dentro de la técnica general de elementos finitos. Existen un número importante de programas basados

en éste método de aplicación universal (SAPIV, ANSYS, NASTRAN, STRUDL, ASKA, BEASY, etc.) y corresponde en el caso de estructuras singulares al procedimiento usual de diseño. A efectos de generalidad conviene dividir los métodos de cálculo de estructuras bajo acciones sísmicas en las dos grandes categorías:

- (1) Cálculo de la fuerza estática equivalente.
- (2) Cálculo dinámico.

El primer grupo corresponde a los métodos de cálculo aproximados que se llevan a cabo y que evitan la complicación del cálculo dinámico más realista. La mayoría de las normas inevitablemente se basan en el método estático de las fuerzas equivalentes e incorporan diferentes grados de refinamiento en un intento de simular el comportamiento real de la estructura. Básicamente estos métodos describen procedimientos groseros de cálculo de la fuerza horizontal total (cortante en la base)  $V$ , de la estructura:

$$V = m a$$

en donde  $m$  es la masa de las estructuras y  $a$  es la aceleración sísmica horizontal, cuyo rango es generalmente de 0.05 g a 0.20 g. La distribución vertical de  $V$  a lo largo de la estructura se lleva a cabo mediante reglas simples. Una de ellas, consiste en introducir cargas puntuales en las masas concentradas, de un modo típico en los niveles de forjado. Las fuerzas sísmicas y momentos se deducen de un cálculo estático y los resultados se combinan con las restantes hipótesis de carga.

En la comprobación de las tensiones se permite un incremento de los valores admisibles del orden de un 30 al 50% cuando se considera esta hipótesis de cálculo sísmico o bien se especifica una reducción del coeficiente de mayoración de las cargas. En regiones de sismicidad media, la hipótesis pésima de carga puede ser, principalmente en edificios altos, otra distinta de la sísmica, generalmente el viento. Incluso en estas situaciones el diseño de la estructura (forma general y detalles constructivos) debería ser regido por consideraciones sísmicas.

En la mayoría de las normas sismorresistentes los esfuerzos obtenidos en un análisis de este tipo son considerablemente menor (del orden de seis a diez veces) que los deducidos en un cálculo dinámico elástico de las estructuras bajo un movimiento sísmico real. La realidad es que, al producirse situaciones anelásticas en la estructura, aparece un mecanismo de disipación de energía, que reduce la discrepancia indicada. En cualquier caso, para que la plasticidad en determinadas secciones de la estructura tenga lugar, es preciso que se diseñe ésta con la suficiente ductilidad. Algunas normas especifican los requisitos de ductilidad necesarios en una estructura sismorresistente.

El otro grupo de procedimiento de cálculo corresponde a los métodos dinámicos. Estos suelen ser precisos, en sustitución de los cálculos aproximados estáticos equivalentes, cuando la estructura es de una cierta importancia, tipo o tamaño.

Todos los métodos de este grupo tienen una característica común: resuelve las ecuaciones de equilibrio dinámico (ecuaciones del movimiento) y deducen a partir de la solución los esfuerzos y desplazamientos de la estructura.

Existen tres métodos importantes en este grupo:

- Resolución directa de las ecuaciones (métodos paso a paso).
- Cálculo modal.
- Técnicas de espectro de respuestas.

La resolución directa constituye el procedimiento mas potente y completo de análisis sísmico, pero presenta como contrapartida el hecho de su elevado coste computacional. Se utiliza particularmente en el análisis no lineal de estructuras, si bien en los casos lineales se usa raramente; a veces es necesario, cuando se considera matrices de amortiguamiento no ortogonales y existe acoplamiento en las ecuaciones modales. Existen actualmente programas de cálculo por computador que consideran simultaneamente los tres acelerogramas, componentes normales del movimiento sísmico en su actuación sobre la estructura.

El cálculo modal es una técnica de análisis de aplicación más limitada, ya que permite la separación de las ecuaciones del movimiento en un conjunto de modos de vibraciones, pero solo en ciertos casos (estructuras lineales y matrices de amortiguamiento ortogonales). La solución se obtiene por superpo-

sición y generalmente en terremotos, solo se precisa un número limitado de modos. El esfuerzo de cálculo es menor que en el caso anterior y los resultados son adecuados. Sin embargo, no da indicaciones exactas -si bien a veces pueden usarse- sobre el grado de ductilidad preciso en los distintos elementos estructurales, y la formación de las tensiones elásticas máximas no coincide necesariamente con la formación de deformaciones plásticas de la estructura bajo un terremoto.

Por último la técnica del espectro de respuesta constituye en realidad una forma simplificada de resolver mediante su superposición de modos las ecuaciones dinámicas. Como antes existen las mismas limitaciones en su aplicación, aumentando la aproximación de los resultados, al existir reglas heurísticas (raíz cuadrada de suma de cuadrados, suma de valores absolutos, etc.) que permiten obtener envolventes de valores máximos. Un procedimiento que engloba situaciones de frecuencia separadas y en conjunto se expone en el apéndice C. La técnica se restringe exclusivamente al cálculo elástico, si bien se ha intentado simular el comportamiento anelástico de la estructura mediante utilización de parejas de espectro de respuestas, espectro de respuesta anelástico aplicable a sistemas con 1 gdl, etc. Todas ellas son demasiado artificiales y poco aproximadas.

La selección del método adecuado de cálculo sísmico no se planteaba hace unos años, ya que no existían, como ahora, programas por computador adecuados y económicos. Según la cla



se de estructura se debe utilizar uno u otro tipo de cálculo, aunque conviene recordar que a medida que se exige una mayor exactitud en el método de análisis debe de considerarse una acción sísmica más acorde y aproximada con la realidad. Por ejemplo, un cálculo dinámico no lineal con un terremoto inadecuado puede conducir a resultados menos realistas que un análisis en espectro de respuesta considerando los espectros sísmicos pertinentes. La tabla 3 indica una clasificación de los métodos de acuerdo con el tipo de estructura.

TABLA 3

Tipo de estructura	Método de cálculo
Estructuras pequeñas y sencillas.	(1) Fuerzas estáticas equivalentes (Normas adecuadas). (2) Espectro de respuesta (Espectros apropiados).
Estructuras progresivamente más complejas e importantes.	(3) Análisis modal (Movimiento sísmico adecuado). (4) Cálculo 2-D no lineal (Movimiento sísmico adecuado).
Estructuras complejas e importantes.	(5) Cálculo 3-D no lineal (Movimiento sísmico adecuado).

Un factor muy importante en la elección del método de cálculo corresponde al tipo de material estructural que se elige: frágil o dúctil. Con respecto al primero el cálculo lineal elástico puede representar razonablemente bien su comportamiento pero su seguridad frente a las acciones sísmicas es baja. Por el contrario los materiales ductiles se comportan adecuadamente frente a un terremoto pero su modelo de análisis estructural se complica.



## APENDICE A.- UN MODELO PARA LA DETERMINACION DEL TERREMOTO DE DISEÑO

### A1. DEFINICIONES

Se describe en este apéndice un método para obtener el terremoto de diseño para una obra singular. Detalles pueden verse en (A1).

Según la figura A.1 se denomina: P emplazamiento;  $\Omega$  región sísmica (circulo R=300 km);  $\Omega_i$  zona sísmica (equiprobabilidad espacial)

$$\bigcup \Omega_i = \Omega$$

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$\Omega_{ij}$  conjunto  $P \in \Omega_i$  cuya distancia  $\rho = \overline{PP_0}$  esta acotada según

$$\rho_J - \frac{\Delta\rho}{2} \leq \rho \leq \rho_J + \frac{\Delta\rho}{2}$$

$$\rho_J = \rho_{J-1} + \Delta\rho, \quad \rho_0 = 0$$

$$(\Delta\rho = 15 \text{ Km})$$

Suceso  $S_1(I, P)$  es un terremoto de epicentro en el punto P y con intensidad mayor o igual que I.

Suceso  $S_1(I, \Omega_{ij})$  es el conjunto de  $S_1(I, P)$  con  $P \in \Omega_{ij}$ .

Suceso  $S_2(I, P_0)$  es un terremoto cuya intensidad percibida en  $P_0$  es mayor o igual que I.

Periodo de retorno  $PR(I, P_0)$  es el tiempo medio de recurrencia por primera vez del suceso  $S_2(I, P_0)$  ó equivalentemente el intervalo medio entre dos sucesos  $S_2(I, P_0)$  consecutivos.

A2. OBJETIVO Determinar  $PR(I, P_0)$

A3. PLANTEAMIENTO

Los datos son:

$-\Omega, \Omega_i \text{ y } \Omega_{ij}$	$(i = 1, 2, \dots, n)$	dominios.
$-S, S_i \text{ y } S_{ij}$	$(i = 1, 2, \dots, n)$	áreas.
$-\rho_J$	$(j = 1, 2, \dots, J)$	radios.

Conjunto de NT terremotos, definidos cada uno por los siguientes datos: (x,y) coordenadas del epicentro;  $I_e$  intensidad epicentral; t años de aparición.

Curvas de atenuación de cada sismica  $\Delta I_i(\rho)$  función de la distancia  $\rho$  entre el punto y el epicentro del terremoto aparecido en  $\Omega_i$  y corresponde a la diferencia de intensidades.

Dos métodos de análisis se van a seguir. Uno de ellos analiza estadísticamente la muestra (Método estadístico) y el otro simula los sucesos  $S_1(I, \Omega)$  y considera la experiencia conocida mediante la hipótesis de Bayes (Método bayesiano).

#### A4. METODO ESTADISTICO

Toda la experiencia recogida  $S_1(I, \Omega)$  se transmite al emplazamiento  $P_0$ , obteniéndose una muestra  $S_2(I, P_0)$  que puede analizarse estadísticamente. Para ello se considera  $\lambda(I)$ , variable aleatoria: número de terremotos por unidad de tiempo con intensidad igual o mayor que I (sucesos  $S_2(I, P_0)$  por unidad de tiempo) se puede adoptar como valor medio  $\lambda(I)$ , el  $E\{\lambda(I)\} = \bar{\lambda}(I)$ , el valor medio de la muestra considerada.

$$\text{En general } \bar{\lambda}(I) = E\{\lambda(I)\} = A e^{-BI} \quad (A.1)$$

A y B se determinan mediante la técnica de mínimos cuadrados.

A partir de (A.1) se puede extrapolar I, a valores mayores de los experimentados en  $P_0$  y se deduce el periodo de retorno mediante la igualdad

$$PR(I, P_0) = \frac{1}{E\{\lambda(I)\}} \quad (A.2)$$

#### A5. METODO BAYESIANO

Si  $h(I, P_0, t)$  es la función azar o probabilidad de que ocurra el suceso  $S_2(I, P_0)$  en el intervalo  $(t, t+dt)$  por primera vez, se puede escribir:

$$PR(I, P_0) = \int_0^{\infty} t h(I, P_0; t) dt \quad (A.3)$$

La función de distribución  $H(I, P_0; t)$  se define como la probabilidad de que aparezca  $S_2(I, P_0)$  por primera vez en un instante superior a  $t$ .

$$h(I, P_0; t) = - \frac{\partial H}{\partial t} (I, P_0; t)$$

Por otra parte se obtiene:

$$H(I, P_0; t) = \prod_{i,j} P(I', \Omega_{ij}; t, 0) \quad (A.4)$$

con  $I' = I + \Delta_i(\rho_j)$

$P(I', \Omega_{ij}; t, 0)$  la probabilidad de que no se produzca ningún suceso  $S_1(I', \Omega_{ij})$  durante el tiempo  $t$ .

Por otra parte se cumple:

$$P(I', \Omega_{ij}; t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(I', \Omega_{ij}; t, n) q_{ij}^n \quad (A.5)$$

$q_{ij} = 1 - \frac{S_{ij}}{S_i}$  probabilidad de que un suceso  $S_1(I', \Omega_i)$  no tenga su epicentro en  $\Omega_{ij}$ .

Para calcular la probabilidad  $p(I', \Omega_{ij}; t, n)$  se parte de las siguientes consideraciones

$$p(I', \Omega_i; t, n) = \frac{e^{-\lambda t}}{n!} (\lambda t)^n \quad (A.6)$$

con  $\lambda$  número medio de  $S_1(I', \Omega_i)$  por unidad de tiempo. Su valor no es conocido pero siguiendo las ideas bayesianas se supone constituye una variable aleatoria con una distribución a priori que se mejora con la experiencia de una muestra, deduciéndose una nueva distribución a posteriori de  $\lambda$ .

Se adopta como distribución inicial la gamma-1:

$$f(\lambda) = \frac{e^{-\lambda t_0} \lambda^{n_0} t_0^{n_0+1}}{\Gamma(n_0+1)} \quad (A.7)$$

con  $n_0$  número de  $S_1(I', \Omega_i)$  acaecidos durante el tiempo  $t_0$ .

Se comprueba según (A.7) que

$$\bar{\lambda} = \frac{n_0}{t_0}, \quad \overline{(\bar{\lambda} - \lambda)^2} = \frac{n_0}{t_0^2}$$

$$c^2(\lambda) = \frac{\overline{(\lambda - \bar{\lambda})^2}}{(\bar{\lambda})^2} = \frac{1}{n_0}$$

El teorema de Bayes establece

$$\text{Prob}(\text{Hipótesis Hip}_i / \text{Suceso S}) = \frac{\text{Prob}(S / \text{Hip}_i) \text{ Prob}(\text{Hip}_i)}{K}$$

con K una constante de normalidad.

$$f^*(\lambda) = \frac{1}{K} \frac{e^{-\lambda t_1} (\lambda t_1)^{n_1}}{n_1!} \frac{e^{-\lambda t_0} \lambda^{n_0} t_0^{n_0+1}}{r(n_0 + 1)} = \quad (A.8)$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t_1 + t_0)} \lambda^{n_1 + n_0} (t_1 + t_0)^{n_0 + n_1 + 1}}{(n_1 + n_0 + 1)}$$

La nueva distribución de  $\lambda$  es gamma-1 con los nuevos valores

$$\bar{\lambda} = \frac{n_0 + n_1}{t_0 + t_1}, \quad \overline{(\lambda - \bar{\lambda})^2} = \frac{n_0 + n_1}{(t_0 + t_1)^2}$$

$$c^2(\lambda) = \frac{1}{n_0 + n_1}$$

Si se denomina  $v = n_0 + n_1$  y  $\tau = t_0 + t_1$ , se deduce

$$f^*(\lambda) = \frac{e^{-\lambda \tau} \lambda^v \tau^{v+1}}{r(v+1)}$$

La distribución bayesiana de  $n$  es

$$p^*(I', \Omega_i; t, n) = \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} f^*(\lambda) d\lambda =$$

$$= \frac{t^n \tau^{v+1}}{(t+\tau)^{v+n+1}} \frac{(n+v)!}{n! \sqrt{(v+1)}} \quad (\text{A.9})$$

La determinación de  $\tau$  y  $v$  se lleva a cabo como se indica a continuación.

Los NT terremotos tienen su epicentro en la región  $\Omega$  y pueden servir para obtener  $\lambda(I)$  en toda la región, sin embargo  $\lambda(I, \Omega_i)$  es un problema mas difícil por la escasez de datos. Se utiliza las ideas de Newmark y Rosenblueth.

$E\{\lambda(I)\} = \bar{\lambda}(I)$  se conoce a partir del estudio estadístico de los NT sucesos  $S_1(I, \Omega)$ , así como  $c^2\{\lambda(I)\} = \frac{1}{\bar{\lambda}(I)t}$  con  $t$  tiempo considerado para  $S_1(I, \Omega)$  tras la comprobación de hipótesis.

Para la zona  $\Omega_i$  se adoptan los valores a priori de los parámetros sísmicos.

$$E\{\lambda(I, \Omega_i)\} = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^n V_i} E\{\lambda(I)\} = \bar{\lambda}(I, \Omega_i)$$

$$c^2\{\lambda(I, \Omega_i)\} = \left\{ \left( \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{V_i} \right)^{0.25} - 1 \right\} \{1 + c^2(\lambda)\} + c^2(\lambda)$$

$V_i$  volumen corteza zona sísmica  $\Omega_i$ .

Como la aparición de  $S_1(I, \Omega_i)$  una ley de Poisson y la variable aleatoria  $\bar{\lambda}(I, \Omega_i)$  sigue la ley de probabilidad de la distribución conjugada, con

$$\lambda(I, \Omega_i) = \frac{n_0}{t_0}$$

$$c^2\{\lambda(I, \Omega_i)\} = \frac{1}{n_0}$$

estos resultados se mejoran con Bayes y resulta:

$$\bar{\lambda}^*(I, \Omega_i) = \frac{n_0 + n_1}{t_0 + t_1} ; \quad c^2\{\lambda(I, \Omega_i)\} = \frac{1}{n_0 + n_1}$$

con  $n_1$  y  $t_1$  los valores deducidos de las muestras de los NT terremotos que pertenecen al conjunto de sucesos  $S_1(I, \Omega_1)$ .

Por último la fórmula (A.5) se transforma como sigue

$$P(I', \Omega_{ij}; t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} p(I', \Omega_1; t, n) q_{ij}^n$$

$$P(I', \Omega_{ij}; t, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \tau^{v+1} (n+v)!}{n! r(v+1)} q_{ij}^n =$$

$$= \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{v+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{t+\tau}\right)^n q_{ij}^n \binom{n+v}{n} = \left(\frac{\tau}{t+\tau}\right)^{v+1} \frac{1}{\left(1 - \frac{t q_{ij}}{t+\tau}\right)^{v+1}}$$

es decir

$$H(I', \Omega_{ij}; t, 0) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\tau} \frac{S_{ij}}{S}\right)^{v+1}}$$

$v$  y  $\tau$  dependen de la zona  $\Omega_1$  así como del nivel  $I'$  considerado (es decir, de la distancia  $\rho_j$  al emplazamiento), por lo que se puede escribir mejor  $v_{ij}$  y  $\tau_{ij}$ .

El periodo de retorno es:

$$PR(I, P_0) = \int_0^{\infty} t h(I, P_0; t) dt$$

integrando por partes, como  $-t H(I, P_0, t) \Big|_0^{\infty} = 0$  se deduce

$$PR(I, P_0) = \int_0^{\infty} \frac{dt}{\mathcal{R}_{i,j} \left(1 + \frac{t S_{ij}}{\tau_{ij} S_i}\right)^{v_{ij}+1}} = K \int_0^{\infty} \frac{dt}{\mathcal{R}_{i,j} (t+k_{ij})^{v_{ij}+1}}$$

$$\text{con } k_{ij} = \frac{\tau_{ij} S_i}{S_{ij}} \quad \text{y} \quad K = \mathcal{R}_{i,j} (k_{ij})^{v_{ij}+1}$$

Los datos de la NT terremotos deben analizarse ya que los periodos de tiempo para los cuales son fiables varia según la intensidad I. Para ello se lleva a cabo una comprobación de hipótesis.

$S_1(I, \Omega)$  sigue una ley de Poisson.

Si  $p(x_1, x_2)$  es una fdp se puede escribir:

$$p(x_1/x_1+x_2) = \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_1+x_2)}$$

Entonces

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2) &= \frac{e^{-\lambda_1} \lambda_1^{x_1}}{x_1!} \cdot \frac{e^{-\lambda_2} \lambda_2^{x_2}}{x_2!} = \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} (\lambda_1+\lambda_2)^{x_1+x_2}}{(x_1+x_2)!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{x_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{x_2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$p(x_1/x_1+x_2) = \left(\frac{x_1+x_2}{x_1}\right) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{x_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{x_2}$$

La igualdad de  $\lambda_1 + \lambda_2$  implica

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1}{2}$$

y resulta que es suficiente estudiar la probabilidad

$$\sum_{x_1=0}^a \binom{x_1+x_2}{x_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1+x_2} = \alpha \quad (x_1 + x_2 = a)$$

una distribución binomial y  $\alpha$  el valor de la probabilidad.

#### Método:

- 1) Se toman  $n_1$  y  $n_2$  datos de cada muestra y se obtienen  $x_1$  y  $x_2$  resultados favorables.



2) Se deducen de unas tablas el valor  $x_{1s}$  que para  $p = 0,50$  y  $x_1 + x_2 = \text{dato}$ , conduce a la probabilidad  $\alpha$ .

3) Si  $x_1 > x_{1s}$  se realiza la hipótesis ( $\alpha = 0.95$ ).

Análogamente se procede para el valor  $x_{1i}$  inferior.

#### REFERENCIAS

- (A1) M. ARENILLAS , C. SAENZ y A. SAMARTIN. "Criteria to determine Seismic Risk on Sites. Application to Spanish Dams". Comisión Internacional de Grandes Presas. 14 Congreso . Rio de Janeiro (1982).

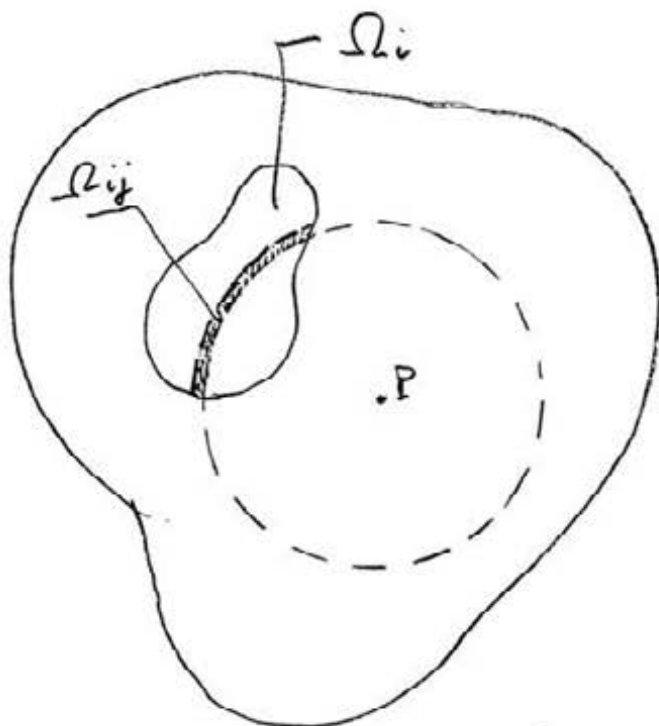


Figura A.1.- Definiciones en los emplazamientos.

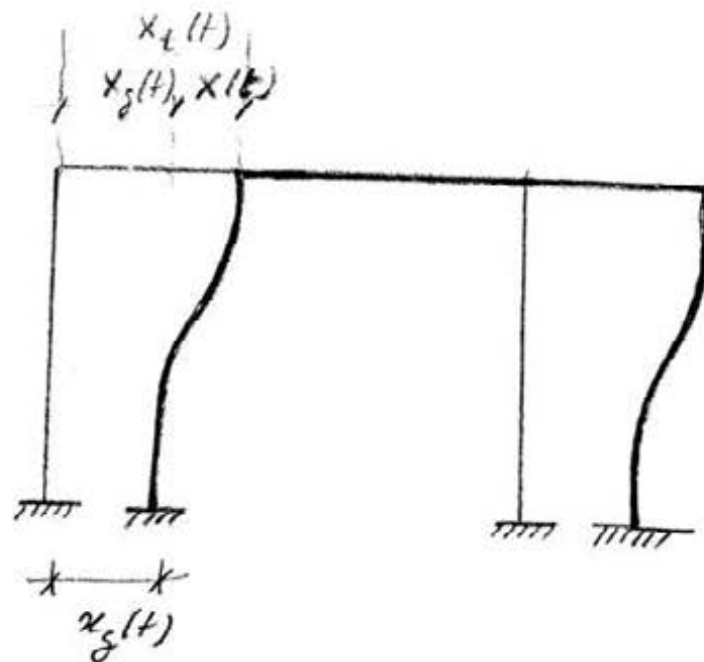


Figura B.4.- Sistema dinámico con 1 gdl.

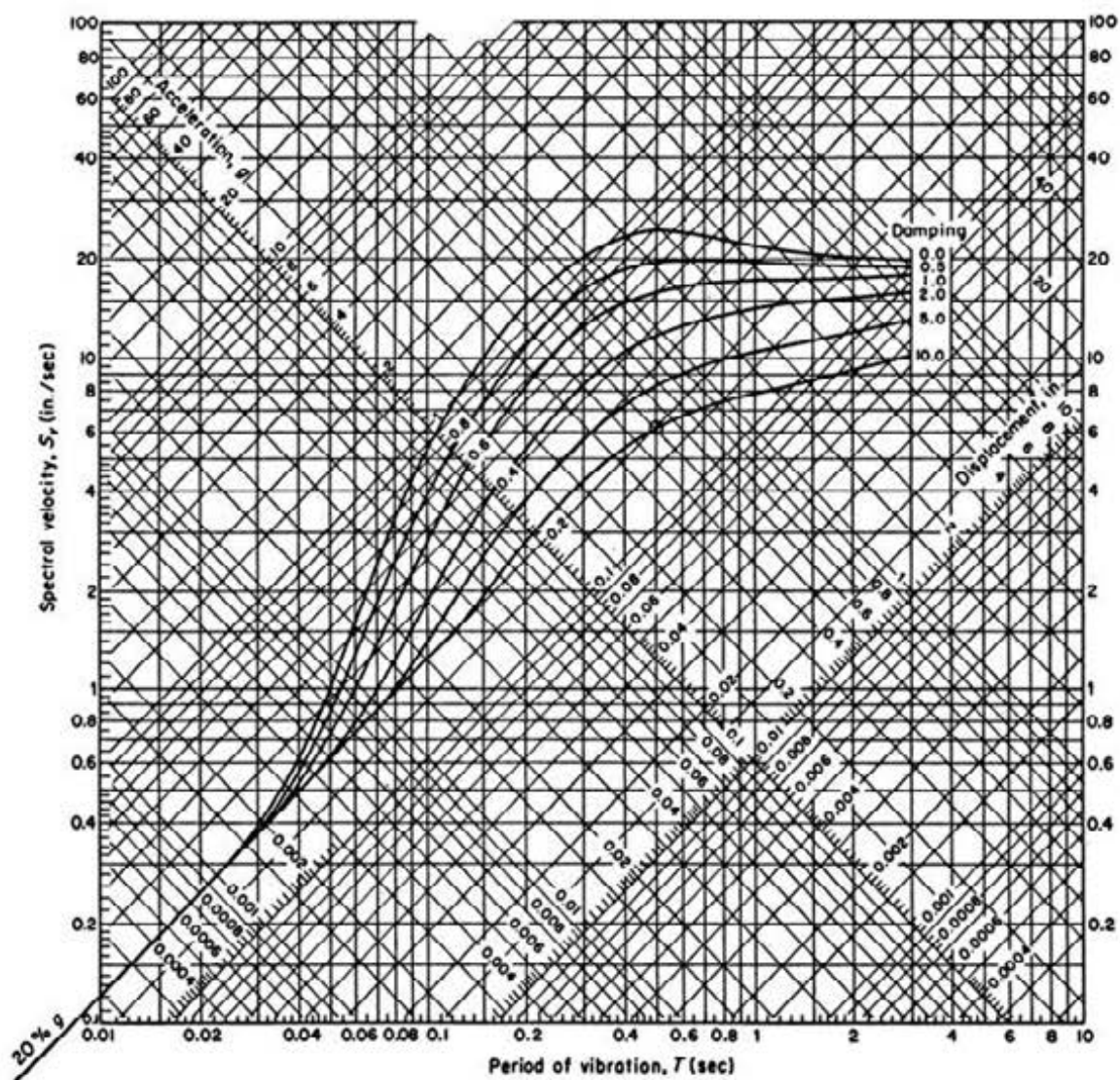


Figura B.2.- Espectros de respuesta combinados.

## APENDICE B.- ESPECTROS DE RESPUESTA, DETERMINACION

### B1. CONCEPTO

Se denomina espectro de respuesta (movimiento SD, velocidad SV ó aceleración SA) de un terremoto a la función representación de los valores máximos de estas respuestas en distintos sistemas dinámicos del terremoto. Estos sistemas dinámicos se caracterizan únicamente por dos parámetros: la frecuencia circular  $\omega$  la fracción de amortiguamiento crítico  $\eta$ . Por lo tanto, los espectros de respuesta SD, SV y SA son funciones de estas variables  $\omega$  y  $\eta$ .

Sea un sistema o estructura dinámica sometida a la acción de un terremoto, descrito como un movimiento horizontal impuesto a la cimentación (figura B.1). Las ecuaciones del equilibrio dinámico son:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m \ddot{x}_g(t) \quad (B.1)$$

La frecuencia fundamental  $\omega$  de la estructura es:

$$\omega = \frac{k}{m}$$

con  $k$  y  $m$  rigidez y masa del sistema.

El amortiguamiento viscoso lineal  $c$  se puede expresar como fracción del amortiguamiento crítico  $c_c = 2 \omega k m$  mediante el coeficiente  $\eta$  siendo

$$\eta = \frac{c}{c_c}$$

La ecuación (B.1) se transforma en la siguiente:

$$\ddot{x} + 2 \eta \omega \dot{x} + \omega^2 x = - \ddot{x}_g(t) \quad (B.2)$$

Esta ecuación muestra que la respuesta  $x(t)$  depende únicamente, para un terremoto especificado  $\ddot{x}_g(t)$ , de los parámetros  $\omega$  y  $\eta$  de la estructura.

La solución de (B.2) viene dada por la fórmula de Duhamel:

$$x(t) = - \frac{1}{\omega \sqrt{1-\eta^2}} \int_0^t \ddot{x}_g(\tau) \exp\{-\eta \omega (t-\tau)\} \sin \omega \sqrt{1-\eta^2} (t-\tau) d\tau$$

(B.3)

El máximo valor del desplazamiento relativo  $\delta$  dinámico  $x(x = x_t - x_g$  según figura B.1), es por definición, la coordenada del espectro de respuesta de desplazamientos relativos correspondientes a una frecuencia  $\omega$  y un amortiguamiento  $\eta$ , es decir:

$$SD(\omega, \eta) = \max_t |x(t)| \quad (B.4)$$

De modo análogo se definen los espectros de respuesta de velocidades relativas,  $SV(\omega, \eta)$  o de aceleraciones absolutas ( $\ddot{x}_t = \ddot{x}_h + \ddot{x}$ ),  $SA(\omega, \eta)$ .

Suelen utilizarse asimismo los espectros de respuesta de pseudo velocidades relativas  $PSC(\omega, \eta)$  y de pseudo aceleraciones absolutas  $PSA(\omega, \eta)$  definidas por las expresiones:

$$\begin{aligned} PSV(\omega, \eta) &= \omega SD(\omega, \eta) \\ PSA(\omega, \eta) &= \omega PSV(\omega, \eta) = \omega^2 SD(\omega, \eta) \end{aligned} \quad (B.5)$$

Puede demostrarse que bajo ciertas condiciones la curva  $PSA(\omega, \eta)$  coincide con  $SA(\omega, \eta)$  y la curva  $PSV(\omega, \eta)$  con  $SV(\omega, \eta)$ .

La utilización de los espectros de respuesta de pseudo-velocidades y pseudoaceleraciones fué introducido en la década de los cuarenta con objeto de simplificar los cálculos. Actualmente se conserva su uso por la ventaja adicional de que permite presentar conjuntamente en un solo diagrama los espectros  $SD$ ,  $PSV$  y  $PSA$ . (Figura B.2).

## B2. DETERMINACION DE ESPECTROS DE RESPUESTAS

El cálculo de las ordenadas de los espectros de respuesta de un movimiento sísmico constituye una tarea sencilla, si bien algo laboriosa. Se precisa determinar, para una serie de sistemas dinámicos de distintas frecuencias comprendidas en el intervalo de interés y para varios coeficientes de amortiguamiento, la historia temporal de la respuesta, reteniendo el máximo valor absoluto de la misma.

Existen varias técnicas de cálculo, aquí se expone brevemente la de Nigam y Jennings.

Sea  $a(t)$  el acelerograma, cuyo espectro de respuesta se desea obtener. Para ello es necesario resolver la ecuación diferencial siguiente:

$$\ddot{x} + 2\eta\omega\dot{x} + \omega^2 x = -a(t) \quad (B.6)$$

En donde  $\eta$  es la fracción del amortiguamiento crítico y  $\omega$  la frecuencia natural de vibración del oscilador lineal de un solo grado de libertad.

Normalmente el acelerograma  $a(t)$  se conoce en forma digitalizada, es decir, se conocen los valores  $a_i = a(t_i)$  para un conjunto de instantes  $t_i$ , y se supone que la variación de  $a(t)$  entre instantes consecutivos es lineal. Los errores inherentes, así como la influencia de la separación entre instantes consecutivos, han sido estudiados por Nigam y Jennings.

Con objeto de resolver (B.6) es suficiente estudiar la solución  $x(t)$  en un intervalo genérico  $(t_i, t_{i+1})$ , es decir:

$$\ddot{x} + 2\eta\omega\dot{x} + \omega^2 x = -a(t) \quad (B.7)$$

con

$$a(t) = a_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i)$$

$$t_i \leq t \leq t_{i+1}$$

y las condiciones iniciales conocidas, en el instante  $t_i$ :

$$x(t_i) = x_i$$

$$\dot{x}(t_i) = \dot{x}_i$$

La solución de (B.7) se obtiene como suma de la ecuación homogénea (solución general) y una particular de la ecuación completa

$$x = e^{-\eta\omega\tau} \{C_1 \cos\omega_d\tau + C_2 \sin\omega_d\tau\} + \frac{2\eta}{\omega^2} \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} - \frac{a_i}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} \tau \quad (B.8)$$

con  $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$$\omega_d = \omega \sqrt{1-\eta^2}$$

$$\tau = t - t_i$$

Las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se obtienen a partir de las condiciones iniciales, alcanzandose los siguientes resultados:

$$C_1 = x_i - \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} + \frac{a_i}{\omega^2} \quad (B.9)$$

$$C_2 = \frac{1}{d} (\dot{x}_i + \eta \omega x_i + \frac{1-2\eta^2}{\omega^2} \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} + \frac{\eta}{\omega} a_i) \quad (B.10)$$

y sustituyendo estos valores en (B.8) se obtiene la expresión de  $x(t)$  valida en el intervalo  $(t_i, t_{i+1})$ .

Si se denomina

$$\underline{x}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{bmatrix}, \quad \underline{a}_i = \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

se puede poner las expresiones (B.9) y (B.10) de las constantes  $C_1$  y  $C_2$  en forma mas adecuada para la computación automática.

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\eta \omega}{\omega_d} & \frac{1}{\omega_d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ \dot{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} + \frac{2\eta}{\omega^3} + \frac{1}{\Delta t_i} & -\frac{2\eta}{\omega^3} \frac{1}{\Delta t_i} \\ \frac{\eta}{\omega_d} - \frac{1-2\eta^2}{\omega_d \omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} & \frac{1-2\eta^2}{\omega_d \omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ a_{i+1} \end{bmatrix}$$

o bien

$$\underline{C} = \underline{A}_1 \underline{x}_i + \underline{A}_2 \underline{a}_i \quad (B.11)$$

y la expresión de  $x(t)$ , se puede poner en la forma:

$$x(t) = (1, 0) e^{-\eta \omega \tau} \begin{bmatrix} \cos \omega_d \tau & \sin \omega_d \tau \\ -\sin \omega_d \tau & \cos \omega_d \tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} - \frac{a_i}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} \tau \quad (B.12)$$

y la derivada  $\dot{x}(t)$  es por lo tanto:

$$\dot{x}(t) = (-\eta\omega, \omega_d) e^{-\eta\omega\tau} \begin{bmatrix} \cos\omega_d\tau & \text{sen}\omega_d\tau \\ -\text{sen}\omega_d\tau & \cos\omega_d\tau \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{\omega} \frac{\Delta a_i}{\Delta t_i} \quad (\text{B.13})$$

Ambas ecuaciones (B.12) y (B.13), pueden escribirse como sigue:  $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} = \underline{A}_3 \cdot \underline{P}_1(\tau) \underline{C} + \underline{P}(\tau) \underline{a}_i$  (B.14)

$$\underline{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\eta\omega & \omega_d \end{bmatrix}$$

siendo

$$\underline{P}(\tau) = e^{-\eta\omega\tau} \begin{bmatrix} \cos\omega_d\tau & \text{sen}\omega_d\tau \\ -\text{sen}\omega_d\tau & \cos\omega_d\tau \end{bmatrix}$$

$$\underline{P}_2(\tau) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\omega^2} - \frac{2\eta}{\omega^3 \Delta t_i} + \frac{\tau}{\omega^2 \Delta t_i} & \frac{2\eta}{\omega^3 \Delta t_i} - \frac{\tau}{\omega^2 \Delta t_i} \\ \frac{1}{\omega^2 \Delta t_i} & -\frac{1}{\omega^2 \Delta t_i} \end{bmatrix}$$

o bien al considerar la igualdad (B.11):

$$\underline{x}(t) = \underline{A}_3 \underline{P}_1(\tau) (\underline{A}_1 \underline{x}_i + \underline{A}_2 \underline{a}_i) + \underline{P}_2(\tau) \underline{a}_i \quad (\text{B.15})$$

El valor de  $\underline{x}(t)$  para  $t = t_{i+1}$ , es evidentemente  $\underline{x}_{i+1}$  y puede deducirse de (B.15), al introducir el valor  $\tau = \Delta t_i$ , obteniéndose:

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{A}_3 \underline{P}_1(\Delta t_i) \underline{A}_1 \underline{x}_i + (\underline{A}_3 \underline{P}_1(\Delta t_i) \underline{A}_2 + \underline{P}_2(\Delta t_i)) \underline{a}_i$$

o más compactamente

$$\underline{x}_{i+1} = \underline{A} \underline{x}_i + \underline{B}$$

o siendo

$$\underline{A} = \frac{1}{\omega_d} e^{-\eta\omega\Delta t_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\eta\omega & \omega_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\omega_d\Delta t_i & \text{sen}\omega_d\Delta t_i \\ -\text{sen}\omega_d\Delta t_i & \cos\omega_d\Delta t_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_d & 0 \\ \eta\omega & 1 \end{bmatrix}$$



$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{2\eta}{\omega} \frac{1}{\Delta t_i} & \frac{2\eta}{\omega} \frac{1}{\Delta t_i} - \frac{1}{\omega^2} \\ \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} & -\frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} \end{bmatrix} +$$

$$e^{-\eta\omega\Delta t_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\eta\omega & \omega_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\omega_d\Delta t_i & \text{sen}\omega_d\Delta t_i \\ -\text{sen}\omega_d\Delta t_i & \cos\omega_d\Delta t_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\omega^2} + \frac{2\eta}{\omega} \frac{1}{\Delta t_i} & -\frac{2\eta}{\omega} \frac{1}{\Delta t_i} \\ \frac{\eta}{\omega\omega_d} - \frac{1-2\eta^2}{\omega_d\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} & \frac{1-2\eta^2}{\omega_d\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} \end{bmatrix}$$

Las matrices A y B se pueden definir de forma explicita del modo siguiente:

Matriz A:

$$a_{11} = \frac{1}{\omega_d} e^{-\eta\omega\Delta t_i} (\omega_d \cos\omega_d \Delta t_i + \eta\omega \text{sen}\omega_d \Delta t_i)$$

$$a_{12} = \frac{1}{\omega_d} e^{-\eta\omega\Delta t_i} (\text{sen}\omega_d \Delta t_i)$$

$$a_{21} = -\frac{1}{\omega_d} e^{-\eta\omega\Delta t_i} \{ (\omega_d^2 + \eta^2\omega^2) \text{sen}\omega_d\Delta t_i \} - \omega^2 a_{12}$$

$$a_{22} = \frac{1}{\omega_d} e^{-\eta\omega\Delta t_i} (-\eta\omega \text{sen}\omega_d\Delta t_i + \omega_d \cos\omega_d\Delta t_i)$$

Matriz B:

$$b_{11} = e^{-\eta\omega\Delta t_i} \left\{ \left( \frac{\eta}{\omega_d\omega} - \frac{1-2\eta^2}{\omega_d\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} \right) \text{sen}\omega_d\Delta t_i + \left( \frac{1}{\omega} + \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{1}{\Delta t_i} \right) \cos\omega_d\Delta t_i \right\} - \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{1}{\Delta t_i}$$

$$b_{12} = e^{-\eta\omega\Delta t_i} \left( \frac{1-2\eta^2}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} \text{sen}\omega_d\Delta t_i - \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{1}{\Delta t_i} \cos\omega_d\Delta t_i \right) + \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{1}{\Delta t_i} - \frac{1}{\omega^2}$$

$$b_{21} = e^{-\eta\omega\Delta t_i} \left\{ \left( \frac{\eta}{\omega} - \frac{1-2\eta^2}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} \right) \left( -\frac{\eta\omega}{\omega_d} \text{sen}\omega_d\Delta t_i + \cos\omega_d\Delta t_i \right) - \left( \frac{1}{\omega^2} + \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{1}{\Delta t_i} \right) (\eta\omega \cos\omega_d\Delta t_i + \omega_d \text{sen}\omega_d\Delta t_i) \right\} + \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i}$$

$$b_{22} = e^{-\eta\omega\Delta t_i} \left\{ \frac{1-2\eta^2}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i} \left( -\frac{\eta\omega}{\omega_d} \text{sen}\omega_d\Delta t_i + \cos\omega_d\Delta t_i \right) + \frac{2\eta}{\omega^3} \frac{1}{\Delta t_i} (\eta\omega \cos\omega_d\Delta t_i + \omega_d \text{sen}\omega_d\Delta t_i) \right\} - \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\Delta t_i}$$

#### REFERENCIAS

-NIGAM N.C. y JENNINGS P.C. "SPECQ/SPECVQ. Digital Calculation from Strong-motion Earthquake Records". California Institute of Technology. Psadena (1968).

## APENDICE C.- COMBINACION DE RESPUESTAS MODALES

Se considera primeramente una estructura que vibra con dos modos naturales, es decir, su respuesta en un instante  $t$  es:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (C.1)$$

$x_1(t)$  y  $x_2(t)$  son las contribuciones del primer y segundo modo respectivamente.

Se designa por  $\langle \rangle$  la operación media según el tiempo. Se puede escribir entonces:

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \{x_1(t) + x_2(t)\}^2 dt = \\ &= \langle x_1(t)^2 \rangle + \langle x_2(t)^2 \rangle + 2 \langle x_1(t) x_2(t) \rangle \quad (C.2) \end{aligned}$$

Se introducen los conceptos de función de autocorrelación y correlación cruzada, designadas por  $R_{x_i}(\tau)$  y  $R_{x_1 x_2}(\tau)$  respectivamente, es decir:

$$\begin{aligned} R_{x_1}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) x_1(t+\tau) dt \\ R_{x_1 x_2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) x_2(t+\tau) dt \end{aligned} \quad (C.3)$$

Se supone en las fórmulas (C.3) que el proceso es estacionario y ergódico. Se comprueba, por otra parte las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} R_{x_1}(0) &= \langle x_1^2 \rangle = (x_{1,rms})^2 \\ R_{x_1} R_{x_2}(0) &= \rho_{x_1 x_2}(0) x_{1,rms} x_{2,rms} \end{aligned} \quad (C.4)$$

en donde  $\rho_{x_1 x_2}(\tau)$  designa el coeficiente de correlación cruzada definido como sigue

$$\rho_{x_1 x_2}(0) = \frac{R_{x_1 x_2}(0)}{R_{x_1}(0) R_{x_2}(0)}$$

y  $x_{i,rms}$  corresponde a la raíz cuadrada de la media de los cuadrados de  $x_i(t)$ .

La ecuación (C.1) se transforma, por consiguiente, en:

$$x_{rms}^2 = x_{1,rms}^2 + x_{2,rms}^2 + 2\rho_{x_1x_2}(0) x_{1,rms} x_{2,rms} \quad (C.5)$$

En la excitación dinámica es razonable considerar las historias temporales modales como funciones aleatorias de media nula. En este caso su desviación típica se mide por  $x_{rms}$ , y si la variación de la amplitud  $x$  es gaussiana, se sabe que solamente un uno por ciento del tiempo esta excede el valor  $3x_{rms}$ . Por lo tanto, se puede escribir aproximadamente la amplitud pico ( $x_p$ ) como:

$$x_p = 3 x_{rms} \quad (C.6)$$

La ecuación (C.5) se convierte en la siguiente:

$$x_p^2 = x_{1,p}^2 + x_{2,p}^2 + 2\rho_{x_1x_2}(0) x_{1,p} x_{2,p} \quad (C.7)$$

La fórmula (C.7) se puede extender en general a un número arbitrario de modos y permite combinar de un modo coherente los valores pico (máximos) obtenidos de un cálculo dinámico basado en espectros de respuesta.

El coeficiente de correlación cruzada  $\rho_{x_1x_2}$  mide la dependencia funcional entre las historias temporales  $x_1(t)$  y  $x_2(t+\tau)$ . Su valor se encuentra limitado para todo  $\tau$ , como sigue:

$$-1 \leq \rho_{x_1x_2}(\tau) \leq 1 \quad (C.8)$$

En el caso de modos no relacionados  $\rho_{x_1x_2}(0) = 0$  y la fórmula general (A.7) corresponde a la propuesta por Newmark, es decir:

$$x_p = x_{1,p}^2 + x_{2,p}^2 \quad (C.9)$$

Si los modos estan totalmente correlacionados el valor de  $\rho_{x_1x_2}(0)$  se acerca a la unidad, y la fórmula de suma de valores

absolutos de los valores físicos, se debe aplicar, como resulta de (A.7), es decir:

$$x_p = x_{1,p} + x_{2,p} \quad (C.10)$$

Existen diferentes intentos de expresar de un modo simple el valor del coeficiente de correlación cruzada. Rosenblueth y E. Elorduy (C.1), Singh, Chu y Singh (C.2) y Nelson (C.3) entre otros. La expresión presentada por Nelson (C.4) se comenta a continuación.

Se denomina  $e_{ij} = \rho_{x_i, x_j}(0) = e_{ji}$ . La ecuación (A.7) se puede generalizar como sigue:

$$x_p = \left\{ \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N x_{p,k} x_{p,l} e_{kl} \right\}^{1/2} \quad (C.11)$$

Parece razonable no considerar en la ecuación (C.11) términos con valores pequeños de  $e_{kl}$ , por ejemplo  $e_{kl} < 0.1$ , que corresponde a situaciones de  $T_l < 0.8 T_k$ .

La Regulatory Guide 1.92, de la U.S. Atomic Energy Commission "Combination of Modes and Spatial Components in Seismic Response Analysis" de 1974 presenta una versión simplificada de la ecuación (C.11).

Se define un enjambre de modos, a todos los de un grupo procedentes de frecuencias comprendidas entre la más baja del grupo y un diez por ciento más alta. Si el número de modos del grupo es  $N_q$  se escribe:

$$x_p^2 = \left\{ \sum_{m=1}^{N_q} x_{p,m} \right\}^2 \quad (C.12)$$

Si hay  $N_G$  grupos o enjambres de modos, cada uno no correlacionado con los otros, la expresión (C.12) puede ser modificada de acuerdo con (C.9) como sigue:

$$x_p = \left\{ \sum_{q=1}^{N_G} \left\{ \sum_{m=1}^{N_q} x_{p,mq} \right\}^2 \right\}^{1/2} \quad (C.13)$$

Si existen, además de los  $N_G$  enjambres no correlacionados,  $N'$  modos individuales incorrelacionados la ecuación (A.13) se puede extender de acuerdo con la expresión

$$x_p \left\{ \sum_{k=1}^{N'} x_{p,k}^2 + \sum_{m=1}^{N_G} x_{p,mq} \right\}^{1/2} \quad (C.14)$$

Existe una formulación alternativa a (C.13). En efecto, se define la media del enjambre q-simo como:

$$\bar{x}_{p,q} = \frac{\sum_{m=1}^{N_q} x_{p,mq}}{N_q} \quad (C.15)$$

La raíz cuadrada del cuadrado de la media de los enjambres es:

$$(\bar{x}_p)_{rms} = \left\{ \frac{\sum_{q=1}^{N_G} (\bar{x}_{p,q})^2}{N_G} \right\} \quad (C.16)$$

Si la densidad modal y el amortiguamiento se suponen razonablemente uniformes con el ancho de banda de la excitación se puede admitir que  $N_q$  sea idéntico para cada grupo.

La ecuación (C.13) se convierte en este caso:

$$x_p = N_q \sqrt{N_G (\bar{x}_p)_{rms}} \quad (C.17)$$

#### REFERENCIAS

- C1. ROSENBLUETH, E. y Elorduy, J. "Responses of Linear Systems to Certain Transient Disturbances" Proc. 4-th World Conf. on Earth. Eng. (1969).
- C2. SINGH, A.K.; CHU S.L. y SINGH S. "Influence of closely spaced modes in the Response Spectrum Method of Analysis". Report 126 Sargent and Lundy Corp. (1973).
- C3. NELSON F.C. "The role of closely spaced modes in the seismic response of equipment and structures". Proc. of the U.S. Nat. Conf. on Earth. Eng. (1975).

## APENDICE D.- UN METODO DE REDUCCION DEL TAMAÑO DE PROBLEMAS DINAMICO, CONDENSACION EN MASAS

El tamaño de los problemas dinámicos puede ser reducido, mediante el procedimiento usual de considerar una serie de gdl "maestros", en función de los cuales se expresan los restantes gdl "esclavos". Una técnica adecuada utilizada frecuentemente en el análisis de estructuras con un número elevado de gdl (obras singulares) se comenta a continuación.

Las ecuaciones del movimiento de una estructura se pueden expresar:

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}} + \underline{C} \dot{\underline{u}} + \underline{K} \underline{u} = \underline{P}(t) = -\underline{M} \underline{r} \ddot{u}_g(t) \quad (D.1)$$

Son  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$  y  $\underline{K}$  matrices de masa, amortiguamiento y rigidez de la estructura.

$\underline{u}(t)$ ,  $\dot{\underline{u}}(t)$  y  $\ddot{\underline{u}}(t)$  los vectores movimientos, velocidades y aceleraciones de todos los gdl de la estructura.

$\underline{P}(t)$  es la fuerza dinámica equivalente al terremoto definido por el acelerograma  $\ddot{u}_g(t)$ . En el caso de excitación múltiple de soportes, ver por ejemplo (D.1).

Si se define la transformación de coordenadas

$$\underline{u} = \underline{T} \cdot \underline{q} \quad (D.2)$$

con mucho menor que filas, es decir, la dimensión del vector columna  $\underline{u}(N)$  se supone mucho mas pequeña que la vector  $\underline{q}(M)$  constituido por los gdl maestros.

La ecuación (D.1) se transforma en la siguiente al introducir (D.2):

$$\underline{M}^* \ddot{\underline{q}} + \underline{C}^* \dot{\underline{q}} + \underline{K}^* \underline{q} = \underline{T}^T \underline{P}(t) \quad (D.3)$$

con

$$\begin{aligned} \underline{M}^* &= \underline{T}^T \underline{M} \underline{T} \\ \underline{C}^* &= \underline{T}^T \underline{C} \underline{T} \\ \underline{K}^* &= \underline{T}^T \underline{K} \underline{T} \end{aligned}$$



matrices reducidas de masa, amortiguación y rigidez.

Una vez resuelto el sistema (D.3) de menor dimensión que el original se pueden recuperar todos los gdl  $\underline{u}$  mediante la aplicación C.2.

Un modo semiautomático de obtención de  $\underline{T}$  consiste en resolver el sistema:

$$\begin{bmatrix} \underline{K}_{11} & \underline{K}_{12} \\ \underline{K}_{21} & \underline{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} \\ \underline{F}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F} \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (D.4)$$

En este sistema la matriz de rigidez  $\underline{K}$  de la estructura se ha particionado y reordenado en los gdl maestros (subíndice 1) y esclavos (subíndice 2). La matriz  $\underline{I}$  corresponde a la matriz unidad de dimensión  $M$  y  $\underline{0}$  es la matriz con todos sus elementos nulos y dimensión  $(N-M)$ .

Las matrices incógnitas  $\underline{F}_{11}$  y  $\underline{F}_{12}$  se determinan mediante resolución (C-4).

La matriz de transformación  $\underline{T}$  que se propone es:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \underline{F}_{11} \\ \underline{F}_{12} \end{bmatrix} \underline{F}_{11}^{-1} \quad (D.5)$$

Existen criterios de selección de los gdl maestros (D.2) y que permiten la especificación automática de los mismos una vez formada la matriz de rigidez  $\underline{k}$  de la estructura.

#### REFERENCIAS

- D1.- SAMARTIN, A. Capítulo 4 del "Cálculo Dinámico en la Ingeniería Civil". Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Madrid (1973).
- D2.- HENSHELL, H.D. y ONG, J.H. "Automatic Master for Eigenvalue economization" Earth. Eng. Struc Dyn. 3 (1975).